

سلسلة 1	الأعداد العقدية حلول مقترحة	السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية
<b>تمرين 1 :</b>		
$z_3 = (i+2)^3$ $z_3 = i^3 + 3 \times i^2 \times 2 + 3 \times i \times 2^2 + 2^3$ $z_3 = -i - 6 + 12i + 8$ $z_3 = 2 + 11i$	$z_2 = (7i-1)^2$ $z_2 = (7i)^2 - 14i + 1$ $z_2 = -49 - 14i + 1$ $z_2 = -48 - 14i$	$z_1 = (5i-1)(i+3)$ $z_1 = 5i^2 + 5i - i - 3$ $z_1 = -5 + 4i - 3$ $z_1 = -8 + 4i$
$z_6 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$ $z_6 = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^5$ $z_6 = \left(\frac{2}{4} + i - \frac{2}{4}\right)^5$ $z_6 = i^5 = i^2 \times i^2 \times i = i$	$z_5 = \frac{5}{2-i} + \frac{3-i}{2+i}$ $z_5 = \frac{5(2+i)}{2^2 - i^2} + \frac{(3-i)(2-i)}{2^2 - i^2}$ $z_5 = \frac{10+5i}{4+1} + \frac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$ $z_5 = \frac{10+5i+6-5i-1}{5} = \frac{15}{5} = 3$	$z_4 = (3-i)^4$ $z_4 = [(3-i)^2]^2$ $z_4 = (9-6i+i^2)^2$ $z_4 = (9-6i-1)^2$ $z_4 = (8-6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i + (6i)^2$ $z_4 = 64 - 96i - 36$ $z_4 = 28 - 96i$
<p>في كل الحسابات نطبق القواعد المعروفة في المجموعة <math>IR</math> من نشر و تعميل ومتطابقات و ... مع استعمال المتساوية <math>i^2 = -1</math> دون تحديد قيمة معينة للعدد العقدي <math>i</math> فهو أساس بناء مجموعة الأعداد العقدية.</p>		
<b>تمرين 2 : لنحل في <math>C</math> المعادلات :</b>		
<p>لدينا : <math>z+i = -2z+7</math> : منه <math>z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i</math></p> <p><math>3z = 7-i</math> : منه <math>z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i</math></p> <p><math>S = \left\{\frac{7}{3} - \frac{1}{3}i\right\}</math> : منه <math>z = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}i</math></p>		
<p>لدينا : <math>i-z = iz-3</math> : منه <math>z = \frac{3+i}{1+i}</math></p> <p><math>z = \frac{3-3i+i-i^2}{1+1}</math> : منه <math>z = \frac{4-2i}{2}</math></p> <p><math>S = \{2-i\}</math> : منه <math>z = 2-i</math></p>		
<p>لدينا : <math>3\bar{z} = i(\bar{z}+1)</math> : منه <math>\bar{z} = \frac{i}{3-i}</math></p> <p><math>\frac{3\bar{z}}{\bar{z}+1} = i</math> : منه <math>\bar{z} = \frac{i(3+i)}{9+1}</math></p> <p><math>S = \left\{\frac{-1}{10} - \frac{3}{10}i\right\}</math> : منه <math>z = \frac{-1}{10} - \frac{3}{10}i</math> إذن : منه <math>\bar{z} = \frac{-1}{10} + \frac{3}{10}i</math></p>		
<p>بوضع <math>z = x+iy</math> نجد : <math>5z+7\bar{z}+4i-3=0</math></p> <p><math>S = \left\{\frac{1}{4} + 2i\right\}</math> : بالتالي <math>z = \frac{1}{4} + 2i</math> : منه <math>\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = 2 \end{cases}</math> : منه <math>\begin{cases} 12x = 3 \\ -2y = -4 \end{cases}</math> : منه <math>\begin{cases} 5(x+iy) + 7(x-iy) + 4i - 3 = 0 \\ 5x + 5iy + 7x - 7iy + 4i - 3 = 0 \end{cases}</math></p> <p><math>12x - 2iy = 3 - 4i</math></p>		
<p>في المثالين الأولين اتبعنا نفس الطرق المتبعة في حل معادلة من الدرجة الأولى في <math>IR</math> ، في المثال الثالث وجدنا بنفس الطرق مرافق <math>z</math> و</p>		

بعد ذلك حددنا قيمة هذا الأخير (للتذكير مرافق  $z = a + ib$  هو  $\bar{z} = a - ib$ )

أما المثال الأخير فتوجب استعمال طريقة مغايرة لكونه يحتوي على المجهول ومرافقه و تم خلال هذه الطريقة استعمال الخاصية:

$$a + ib = a' + ib' \Rightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

$$z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3 \quad , \quad z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i} \quad : \text{تمرين 3}$$

$$z_1 \in \mathbb{R} : \text{إذن } \bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{5 + 4i}{5 - 4i}\right) + \left(\frac{5 - 4i}{5 + 4i}\right)} = \frac{5 - 4i}{5 + 4i} + \frac{5 + 4i}{5 - 4i} = z_1 : \text{منه } z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i}$$

$$\bar{z}_2 = \overline{(1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3} = (1 - 2i)^3 - (1 + 2i)^3 = -z_2 : \text{منه } z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3 = -z_2$$

إذن:  $z_2 \in i\mathbb{R}$

استعملنا الخاصيتين:  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$  و  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$

$$z_1 = \frac{5 + 4i}{5 - 4i} + \frac{5 - 4i}{5 + 4i} = \frac{(5 + 4i)^2}{25 + 16} + \frac{(5 - 4i)^2}{25 + 16}$$

$$z_1 = \frac{25 + 40i - 16 + 25 - 40i - 16}{41} = \frac{18}{41}$$

$$z_2 = (1 + 2i)^3 - (1 - 2i)^3$$

$$z_2 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 + (2i)^3 - (1^3 - 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 1 \times (2i)^2 - (2i)^3)$$

$$z_2 = 1 + 6i - 12 - 8i - [1 - 6i - 12 + 8i]$$

$$z_2 = 1 + 6i - 12 - 8i - 1 + 6i + 12 - 8i$$

$$z_2 = -4i$$

$$j = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \quad : \text{تمرين 4}$$

$$j^2 + j + 1 = \left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{-2}{4} + \frac{-1}{2} + 1 = 0$$

لنستنتج أن:  $j^3 = 1$

طريقة 2

بما أن  $j^2 = -j - 1$ ، فإن:

$$j^3 = j j^2 = j(-j - 1)$$

$$j^3 = -j^2 - j = -(-j - 1) - j = j + 1 - j = 1$$

طريقة 1

$$j^3 - 1 = (j - 1)(j^2 + j + 1) = (j - 1) \times 0 = 0$$

$$\text{منه: } j^3 = 1$$

$$j^{11} = j^9 \times j^2 = (j^3)^3 \times (-j - 1) = 1 \times (-j - 1) = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H(-1 + 5i) \text{ و } F(3 + 2i) \text{ و } E(1 + i) \text{ و } B\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ و } A\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad : \text{تمرين 5}$$

$$OA = |z_A - z_O| = \left|\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$OB = |z_B - z_O| = \left|\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$AB = |z_B - z_A| = \left| \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = |1| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

منه:  $OA = OB = AB = 1$  بالتالي  $OAB$  مثلث متساوي الأضلاع

🌟 للتذكير:  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $MN = |z_N - z_M|$

$$EH = |z_H - z_E|$$

$$EH = |-1 + 5i - (1 + i)|$$

$$EH = |-1 + 5i - 1 - i|$$

$$EH = |-2 + 4i|$$

$$EH = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

$$EH = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$EH^2 = 20$$

$$HF = |z_F - z_H|$$

$$HF = |3 + 2i - (-1 + 5i)|$$

$$HF = |3 + 2i + 1 - 5i| = |4 - 3i|$$

$$HF = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$HF^2 = 25$$

$$EF = |z_F - z_E| = |3 + 2i - (1 + i)|$$

$$EF = |3 + 2i - 1 - i| = |2 + i|$$

$$EF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$EF^2 = 5$$

منه:  $EF^2 + EH^2 = HF^2$  بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية

فالمثلث  $EFH$  قائم الزاوية في النقطة  $E$

🌟 استعمال بعض التقنيات التي سبق دراستها يكون مفيدا في حل بعض الوضعيات في الهندسة التحليلية العقدية.

لنحدد  $K(z_K)$  حيث يكون الرباعي  $AKEF$  متوازي أضلاع.

لدينا:  $AKEF$  متوازي أضلاع يعني:  $\overline{AK} = \overline{FE}$  منه:  $\text{aff}(\overline{AK}) = \text{aff}(\overline{FE})$  أي:  $z_K - z_A = z_E - z_F$

$$z_K = z_E - z_F + z_A$$

منه:  $z_K = 1 + i - (3 + 2i) + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + i - 3 - 2i + \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 + \frac{-1}{2} - i + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-5}{2} + \frac{-2 + \sqrt{3}}{2} i$

🌟 يجب كتابة النتيجة على الشكل الجبري:  $a + bi$  لذلك نقوم بالتبسيط وترتيب الحدود ثم التعميل بالعدد  $i$

لدينا  $G(z_G)$  مركز ثقل المثلث  $EFH$  منه:  $\overline{OG} = \frac{1}{3}\overline{OE} + \frac{1}{3}\overline{OF} + \frac{1}{3}\overline{OH}$

منه:  $z_G - z_O = \frac{1}{3}(z_E - z_O) + \frac{1}{3}(z_F - z_O) + \frac{1}{3}(z_H - z_O)$  (لأن:  $z_O = 0$ )

بالتالي:  $z_G = \frac{1 + i + 3 + 2i - 1 + 5i}{3} = \frac{3 + 8i}{3} = 1 + \frac{8}{3}i$

**تمرين 6:**  $u = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$  ،  $A(1)$  و  $U(u)$  ،  $B(2 + u^2)$  ،  $C(1 + u)$  .

$$z_C = 1 + \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad z_B = 2 + \left( \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 2 + \frac{2}{4} + 2 \times \frac{-\sqrt{2}}{2} \times i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{4} = 2 - i$$

لنبين أن  $OUCA$  متوازي أضلاع

لدينا:  $\text{aff}(\overline{OU}) = z_U - z_O = u - 0 = u$  و  $\text{aff}(\overline{AC}) = z_C - z_A = 1 + u - 1 = u$  ، منه:  $\text{aff}(\overline{OU}) = \text{aff}(\overline{AC})$

إذن:  $\overline{OU} = \overline{AC}$  ، بالتالي:  $OUCA$  متوازي أضلاع

لنبين أن  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط مستقيمة، لدينا:

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{1 - (2 - i)}{1 - (1 + u)} = \frac{1 - 2 + i}{1 - 1 - u} = \frac{-1 + i}{-u} = \frac{1 - i}{u} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(1 - i)} = \frac{1 - i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

بالتالي:  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط مستقيمة.

	<p>لنحدد نقطة تقاطع <math>(O, \vec{e}_1)</math> والمستقيم <math>(AB)</math></p> <p>بما أن <math>M \in (O, \vec{e}_1)</math> فإن: <math>z_M = a / a \in \mathbb{R}</math> وبما أن: <math>M \in (AB)</math> فإن <math>A</math> و <math>B</math> و <math>M</math> نقط مستقيمة</p> $\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} = \frac{1 - a}{-1 + i} = \frac{(1 - a)(1 + i)}{(-1 + i)(1 + i)} = \frac{1 - a + (1 - a)i}{-2} = \frac{a - 1}{2} + \frac{a - 1}{2}i$ <p>ولدينا: <math>\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}</math> منه: <math>\frac{a - 1}{2} = 0</math> إذن: <math>a = 1</math> بالتالي: <math>M(1)</math></p>	4
	<p>لنحدد نقطة تقاطع <math>(O, \vec{e}_2)</math> والمستقيم <math>(AB)</math></p> <p>بما أن <math>N \in (O, \vec{e}_2)</math> فإن: <math>z_N = bi / b \in \mathbb{R}</math> وبما أن: <math>N \in (AB)</math> فإن <math>A</math> و <math>B</math> و <math>N</math> نقط مستقيمة</p> $\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} = \frac{1 - bi}{-1 + i} = \frac{(1 - bi)(1 + i)}{(-1 + i)(1 + i)} = \frac{1 + i - bi + b}{-2} = \frac{1 + b}{-2} + \frac{1 - b}{-2}i$ <p>ولدينا: <math>\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} \in \mathbb{R}</math> منه: <math>\frac{1 - b}{-2} = 0</math> إذن: <math>b = 1</math> بالتالي: <math>N(i)</math></p>	5

### رياضيات النجاح أذ سمير لخريسي